PARADOXON

Gedanken zum logischen Denken

Alvar Wenzel

PARADOXON

Gedanken zum logischen Denken

Alvar Wenzel

www.alvarwenzel.de

Vierte, teilweise erweiterte und überarbeitete Auflage
Karlsruhe, 2019

Erste Auflage: 2002
Zweite Auflage: 2008
Dritte Auflage: 2010

Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt
ISBN: 978-3-8311-4300-9

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Vorwort

„Logisches Denken bestimmt unser Leben.“ Dies wird in ähnlicher Form häufiger behauptet. Diese Aussage ist in ihrer Allgemeinheit jedoch leider falsch. Oft werden damit sogar nur die eigenen Interessen kaschiert. Nicht einmal darüber, was ‘logisches Denken’ bedeutet, wird man ohne weiteres Einigkeit erzielen können.

Um logisches Denken in die Praxis zu übertragen, müssen daher zunächst einige grundlegende Fragen geklärt werden, bei deren Beantwortung die Bezeichnung ‘logisches Denken’ mit Inhalt gefüllt wird. Was ist logisches Denken? Was sind die Prinzipien der Logik? Wieso gibt es logische Widersprüche, was sind sie, wie kommen sie zustande und wie lassen sie sich lösen oder wenigstens vermeiden? Gibt es auch unlösbare logische Widersprüche? Diese Fragen sind alles andere als einfach zu beantworten.

Die Mathematik ist nur eines von vielen Gebieten, in denen logisches Denken eine Rolle spielt. Es ist daher nicht zwingend notwendig, die mathematische Logik ins Zentrum der nachfolgenden Betrachtungen zu stellen. Doch lassen sich gerade an mathematisch geprägten Problemstellungen die essenziellen Gedanken zum logischen Denken am prägnantesten demonstrieren. In der Mathematik treten die Prinzipien der Logik in ihrer reinsten Form auf.

Ähnliche Problemstellungen finden sich aber auch in nicht-mathematischen Bereichen. Auch sie werden hier erwähnt, nicht nur weil sie für Nicht-Mathematiker dort anschaulicher erscheinen und daher leichter verständlich. Es sind ja gerade diese Bereiche, auf die wir das mathematisch-logische Denken übertragen wollen.

Leider fehlt den nicht-mathematischen Problemstellungen allerdings oft die klare Durchschaubarkeit der rein mathematischen Formulierung. Hier muss also eine Gratwanderung gegangen werden, um einerseits das Problem nicht zu banalisieren, es andererseits aber auch nicht zu stark zu formalisieren.

Ihrer besonderen Klarheit wegen steht die mathematisch-exakte Logik im Zentrum der folgenden Betrachtungen. Von dieser klar definierten Operationsbasis aus werden immer wieder vergleichbare Problemstellungen aus Bereichen wie Sprache, Physik, Psychoanalyse, Rechtswissenschaft, Philosophie und Literatur aufgegriffen, aber auch beispielsweise ihre Wirkung im Humor.

Denn in allen diesen Bereichen kommen die in der Mathematik auf das Wesentliche konzentrierten logischen Denkmethoden zur Anwendung.

Außerdem ist es ein Ziel dieses Buches, die für das Verständnis des logischen Denkens notwendige Mathematik nicht allzu trocken darzustellen. Zwar ist Nüchternheit des Denkens eines der herausragenden Merkmale der mathematischen Vorgehensweise, wodurch sie trocken und leblos wirken mag. Mathematik muss aber nicht notwendigerweise trocken und leblos sein. Eine stark formalisierte Darstellung der hier angesprochenen mathematischen Probleme wäre daher zwar bei einer Abhandlung angebracht, die ausschließlich für Mathematiker bestimmt ist. Dieses Buch wendet sich jedoch genauso an den interessierten Laien, der die nachfolgenden Ausführungen auch ohne umfangreiche mathematische Vorkenntnisse verstehen will. Daher werden die behandelten Problemstellungen nur am Rande, der wissenschaftlichen Vollständigkeit halber, auch in ihrer mathematischen Formalisierung vorgestellt. Im Vordergrund steht das intuitive Verständnis.

Ein ähnliches Vorgehen ist schließlich in allen wissenschaftlichen Gebieten möglich und sinnvoll. Es stellt auch für den späteren Fachmann das erste Tor zum Verständnis dar. Der Gedanke sollte über der Form stehen. Auch in der Wissenschaft ist selten nur der reine Lehrbuchtext interessant; meist sind es erst die mit dem Text verbundenen und ihm zugrunde liegenden Vorstellungen und Gedankengänge, die ihn lebendig werden lassen. Ein einfaches Beispiel soll dies erläutern: Liest man einen Satz wie „Es war eine klare Nacht und die Sterne schienen auf uns herab“, so sind es auch darin nicht die geschriebenen Worte ‘und’, ‘Nacht’, ‘Es’, ‘schienen’, ... (also die *Form* der Darstellung), die diesen Satz interessant machen. Es ist vielmehr die *Vorstellung*, es sind die *Gedanken* an einen sternenübersäten Nachthimmel, die mit dieser sprachlichen Formulierung verbunden werden, durch die das Interesse geweckt wird. Für die formale Darstellung mathematischer Theorien gilt etwas ganz Ähnliches wie für jenen Satz der Alltagssprache. Auch wenn eine mathematische Formulierung rein formell sehr trocken wirken kann, so verbirgt sich dahinter oft eine reizvolle und die Phantasie anregende Vorstellung. Die in der Theorie verborgene Idee und die der formalen Darstellung zugrunde liegende lebendige Vorstellung sollen bei den Ausführungen dieses Buches im Vordergrund stehen.

Bei solch einem eher intuitiven Herangehen an die Probleme des logischen Denkens darf jedoch die mathematisch exakte Formulierung nicht völlig fehlen. Oft verschafft erst sie uns die Möglichkeit, den Kern eines Problems in aller Klarheit zu erfassen. Daher werden gelegentlich auch mathematische Formulierungen in die Überlegungen miteinbezogen. Wie beim Verstehen einer Fremdsprache ist es für das Verständnis dieser mathematischen Formulierungen jedoch keineswegs erforderlich, die Sprache der Mathematik fließend zu beherrschen. Viele Menschen können sich auch mit unvollständigen Sprachkenntnissen in einem fremdsprachigen Land zurechtfinden; entsprechend sollte es dem Leser dieses Buches gelingen, sich mit einigen grundlegenden mathematischen Sprachkenntnissen in der Welt der Mathematik zu orientieren. Diese mathematischen Sprachkenntnisse werden, soweit sie hier von Bedeutung sind, im Rahmen des Buches eingeführt. Viele der Probleme, mit denen sich die Mathematik befasst, sind dabei weniger fremdartig als es auf den ersten Blick scheinen mag; sie sind bereits mit einer Portion gesunden Menschenverstandes zu begreifen. Überdies kann Formalismus den gesunden Menschenverstand zwar unterstützen, aber nicht ohne ihn auskommen.

Manche der hier vorgestellten Problemstellungen können im Rahmen dieses Buches nicht bis ins allerletzte Detail analysiert und hinterfragt werden. In der Darstellung werden jedoch alle für das zentrale Verständnis eines Problems wichtigen Aspekte angeschnitten.

Um die Prinzipien des logischen Denkens zu untersuchen und besser kennenzulernen, eignen sich Paradoxien, in denen die Logik — auf den ersten Blick jedenfalls — zu versagen scheint. Solche Widersprüchlichkeiten kann man überall finden, nicht nur in der Mathematik. Bei genauerem Hinsehen löst sich der scheinbare Widerspruch allerdings zumeist auf und ermöglicht dann einen freien und klaren Blick auf die wirklichen Zusammenhänge, die zum vermeintlichen Widerspruch geführt haben.

In Paradoxien spielt häufig die Vorstellung von Unendlichkeit eine wichtige Rolle. 'Unendlichkeit' ist in diesem Buch daher einer der zentralen und immer wiederkehrenden Begriffe. Mit Unendlichkeit wird schon ein vermeintlicher (und nicht ganz ernst gemeinter) Widerspruch des ersten Kapitels zu tun haben. Hinzu kommen die sogenannten 'Meta-Konstruktionen', die für eine systematische Beschreibung des logischen Denkens unentbehrlich sind. Eine erste Meta-Konstruktion wird im zweiten Kapitel vorgestellt. Bereits im dritten Kapitel stoßen wir dann auf ein grundlegendes Paradoxon.

> Seitlich eingezogene und vom umgebenden Haupttext abgerückte Absätze in kleinerer Schrift, *so wie dieser*, enthalten ergänzende Randbemerkungen, weitere Beispiele und tiefer gehende Ausführungen. Zum Teil gehen sie dabei über den engeren Rahmen des Buches hinaus und können auch übersprungen werden. Oftmals runden sie das vorher skizzierte Bild ab oder versuchen, ein tieferes Verständnis für die mathematische Seite des Problems aufzubauen.
>
> Weitere Randbemerkungen beziehen sich auf vergleichbare Problemstellungen in anderen Lebensbereichen. Oft haben sie nur auf den ersten Blick nichts mit mathematischer Logik zu tun.*

*Diese Randbemerkung ist genaugenommen eine 'Meta-Randbemerkung', also eine Rand-

Zahlreiche Anmerkungen zu den im Haupttext behandelten Themen finden sich am Ende des Buches (Anhang B ab Seite 369). Sie enthalten weitergehende Informationen, zusätzliche Denkanstöße, Originalzitate, Quellenangaben, Biografisches und ausführlichere Begründungen, die, wären sie direkt im Haupttext untergebracht, den Lesefluss zu sehr stören und von dem eigentlich verfolgten Gedankengang ablenken würden. Alle Textstellen, zu denen Anmerkungen gemacht wurden, sind im Haupttext durch hochgestellte Zahlen (Fußnoten wie ^{1},^{2} ,^{3} , . . .) gekennzeichnet.

Die dritte Auflage wurde gegenüber den beiden vorherigen Auflagen komplett überarbeitet und erweitert. Neu hinzugekommenen ist dabei vor allem Kapitel 14 über die Gödelsche Unvollständigkeit.

Auch drucktechnisch hat sich seit der zweiten Auflage von 2008 einiges geändert. Das Buch ist nun vollständig in LaTeX gesetzt. Auch das Layout wurde dabei überarbeitet.

In der vorliegenden vierten Auflage wurden einige kleinere Verbesserungen vorgenommen und Aktualisierungen durchgeführt.

Über Anregungen und Kritik würde ich mich freuen. Nutzen Sie dazu einfach die aktuellen Kontaktinformationen auf der zu diesem Buch eingerichteten Website `paradoxon.alvarwenzel.de`.

---

bemerkung über Randbemerkungen und damit eine jener Meta-Konstruktionen, die eine so wichtige Rolle bei der Beurteilung des menschlichen Denkens spielen. Der Begriff der 'Meta-Konstruktion' wird erstmals in Abschnitt 2.3 vorgestellt.

‘Richtig’ oder ‘Falsch’

Dieses Kapitel wird mit einem weiteren Meta-Gebilde abschließen, aus dem sich ein wichtiges Paradoxon ableiten lässt. Es behandelt die Frage, wann eine Aussage ‘richtig’ (beziehungsweise ‘wahr’) oder ‘falsch’ (beziehungsweise ‘unwahr’) ist.

3.1 Moralische Richtigkeit

In vielen Situationen ist zu entscheiden, ob eine Aussage, eine Behauptung oder eine Handlung richtig oder falsch ist. Was genau bedeuten jedoch die beiden häufig verwendeten Begriffe ‘richtig’ und ‘falsch’? Versteht jeder Mensch unter ihnen das Gleiche? Oder hat nicht jedermann eine andere Vorstellung von ihnen?

Als moralische Wertungen verstanden sind die Begriffe ‘richtig’ und ‘falsch’ selten eindeutig und können weitreichende Diskussionen über ihre Bedeutung auslösen. Ein Beispiel soll dies erläutern: Meiner Meinung nach ist es falsch, einen Menschen zu töten. Dieser Ansicht werden die meisten Leser sofort zustimmen. Andererseits gibt es in vielen Ländern der Erde die Todesstrafe, auch in solchen Staaten, die mit großem Stolz auf eine Tradition der Freiheit, Gerechtigkeit und Fortschrittlichkeit zurückblicken. Die Todesstrafe kann heutzutage barbarisch anmuten. Auch wenn der zum Tode Verurteilte in seinem Vorleben noch so viel verbrochen hat und nach Ansicht des jeweiligen Gesetzgebers den Tod verdient hat, auch wenn sich ein Staat bei Anordnung und Durchführung der Todesstrafe noch so erhaben gibt, bleibt doch die Tatsache, dass bei ihrer Ausführung ein Mensch getötet wird. Viele Bürger solcher Staaten sind dennoch der Ansicht, die Todesstrafe sei richtig, obwohl sie das Töten eines Menschen andernfalls für falsch halten. Dies erscheint widersprüchlich.

Die Beantwortung der Frage nach der moralischen Richtigkeit einer Handlung kann somit sehr komplex ausfallen. Die endgültige Entscheidung hängt letztlich von der speziellen Situation, den hinter der objektiven Handlung verborgenen Motiven und dem jeweiligen Betrachter mit seinen persönlichen Moralvorstellungen ab. Einige Menschen lehnen jedes Töten ab. Andere werden dem Staat die Ausübung der Todesstrafe zugestehen, vielleicht aber in Bezug auf die Verbrechen, gegen die sie verhängt werden soll, anderer Ansicht sein. Sicherlich gibt es auch Menschen, die keinerlei Vorbehalte gegen das Töten haben — die Weltgeschichte scheint leider voll von ihnen zu sein. Es ist somit selten leicht, eindeutig festzustellen, ob etwas moralisch richtig oder falsch ist.

Der einzige Punkt, in dem sich alle Menschen bei einer Diskussion um die Bedeutung von Richtigkeit einig sein dürften, ist die grundsätzliche Gegensätzlichkeit der Begriffe 'richtig' und 'falsch'. Wenn etwas falsch ist, kann es nicht richtig sein; wenn etwas richtig ist, kann es kaum falsch sein. Das eine ist das genaue Gegenteil des anderen. Wenn es gelingt festzulegen, was 'richtig' bedeutet, so sollte alles, was nicht 'richtig' ist, 'falsch' sein. Oder existieren etwa noch weitere Möglichkeiten?

Bei der Diskussion der moralischen Richtigkeit gibt es auch Wertungen, die sich weder 'richtig' noch 'falsch' (in ihrer extremen Gegensätzlichkeit) zuordnen lassen. Oft existieren zwischen den beiden Polen 'richtig' und 'falsch' beliebig viele weitere Wertungszustände. Was nicht richtig ist, muss nicht sofort falsch sein.

Wieder am Beispiel des Tötens von Menschen lässt sich dieses weitere Problem bei der Beantwortung wertbezogener Fragestellungen deutlich machen: Einen Menschen zu töten, ist im Prinzip falsch. Einen Menschen hinzurichten (eine Handlung, die das Töten eines Menschen einschließt — die Verwendung des Verbs 'hinrichten' anstelle von 'töten' bringt eine nur sprachliche Differenzierung), der einen Dritten ermordet hat, ist möglicherweise nicht falsch, oder mag zumindest weniger falsch sein als das vorausgegangene Tötungsdelikt, das der Mörder begangen hat und das durch seine Hinrichtung vergolten werden soll.[1] Töten in Notwehr kann sogar als moralisch richtig angesehen werden.

Es zeigt sich, wie unklar in derartigen Situationen die moralischen Wertungen 'richtig' und 'falsch' ausfallen. Ein Außenstehender, der die Zwischenstufen und Implikationen moralischer Bewertungen nicht beachtet, wird diese Unterscheidungen als widersinnig ansehen, und das nicht ganz zu unrecht. Menschen zu töten sei falsch. Durch den Staat Menschen zu töten, die ihrerseits Menschen getötet haben, sei aber nicht falsch (also richtig), obwohl das Töten durch den Staat genauso ein Töten von Menschen ist, nach der ersten Aussage also falsch sein müsste.

Welches von beidem ist nun zutreffend? Ist es nun richtig oder falsch, Menschen zu töten? Ohne die Existenz von Zwischenstufen bei moralischen Wertungen wäre die Todesstrafe für Tötung ein Widerspruch in sich, ein Paradoxon. Und selbst nach Berücksichtigung verschiedener Stufen moralischer Richtigkeit wird die Todesstrafe vielen Menschen weiterhin als widersinnig erscheinen.

Man gewinnt den Eindruck, eine Handlung (wie das Töten von Menschen) könne nur nach den Motiven beurteilt werden, aus denen heraus sie begangen wird. Somit wäre nicht die objektive Handlung an sich richtig oder falsch. Aus Habgier zu morden wäre falsch, als Vertreter des Staates in gesellschaftlicher Vergeltung hinzurichten wäre dagegen richtig (hier wird diese Zweckunterscheidung schon in der Verwendung der Worte ‘morden’ und ‘hinrichten’ anstelle von ‘töten’ sprachlich angedeutet). Ist das Motiv Habgier, so wäre das Töten eines Menschen also falsch, ist das Motiv dagegen gesellschaftliche Vergeltung, so wäre das Töten richtig. Die Beurteilung der moralischen Richtigkeit einer Handlung würde dann nur noch von ihrem Motiv und nicht mehr von der Handlung an sich bestimmt werden.[2]

Diese Art der Bewertung ist äußerst gefährlich, da sie der Willkür den Weg ebnet. Ist es erlaubt, etwas Schlechtes, etwas Falsches zu tun, nur weil sich für diese Tat ein gutes Motiv anführen lässt? Ist es umgekehrt vielleicht sogar verwerflich, etwas Gutes, Richtiges zu tun, wenn die Motive dafür falsch sind? Meiner Meinung nach bleibt eine objektiv schlechte Handlung trotz der besten Motive, die sich für sie anführen lassen, weiterhin falsch. Zu oft schon wurden Grausamkeiten im Namen der Religion, der Selbstverteidigung oder des gesellschaftlichen Wohlergehens begangen. Der Zweck heiligt nicht die Mittel.[3]

Tötung in Selbstverteidigung ist in diesem Zusammenhang eine Sachlage, deren moralische Bewertung besonders schwerfällt. Auch ein Gegner der Todesstrafe könnte zugestehen, dass ein Töten in Notwehr im Falle höchster Gefahr rechtfertigt werden kann, obwohl diese Handlung dem eigentlichen Sinn des Wortes ‘richtig’ nicht entsprechen mag.[4] Die Klärung der moralischen Wertungen ‘richtig’ und ‘falsch’ ist auch hier mit großen Problemen verbunden. Offenbar muss die moralische Richtigkeit der objektiven Handlung an sich (der Vorgang des Tötens) zusammen mit dem subjektiven Motiv der Handlung (Habgier, Vergeltung, Selbstverteidigung) beurteilt werden, um zu einem moralisch und logisch erträglichen Wertungsergebnis zu gelangen.

Die Problematik zahlreicher Teilstufen zwischen moralisch richtig und moralisch falsch kann anhand einer Skala veranschaulicht werden, an deren einem Ende die Wertung ‘richtig’ zu finden ist, am anderen die gegensätzliche Wertung ‘falsch’. Dazwischen liegen viele, nicht eindeutig einem der Skalenenden zuordenbare Wertungen moralischer Richtigkeit (Abbildung 3.1).

Einige der Zwischenstufen moralischer Bewertung können näher am positiven Skalenende liegen, andere dichter am negativen. Doch auch die grafische Darstellung ist durch die persönlichen Ansichten des jeweiligen Zeichners gefärbt. Jeder Mensch würde die Pfeile vermutlich ein wenig anders positionieren als ich es getan habe. Außerdem würde man wahrscheinlich die Wer-

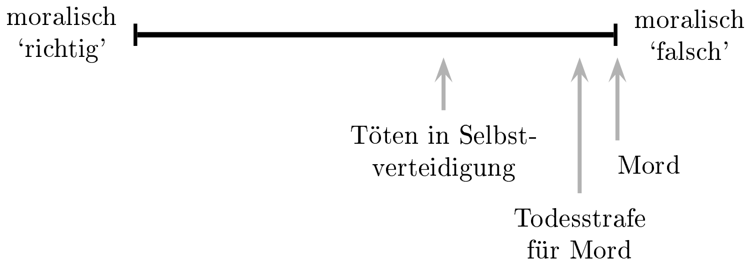

Abbildung 3.1: Skala für moralische Richtigkeit

tungsreihenfolge bei konkreten Fällen der Todesstrafe (etwa für einen Massenmörder) oder des Tötens in Selbstverteidigung (wenn die sich schützende Person unverschuldet in größte Gefahr geriet) jedes Mal anders vornehmen. Eine allgemeine Definition moralischer Richtigkeit, die in jeder Situation und jederzeit gleichermaßen von jedem akzeptiert werden kann, scheint damit unmöglich.

3.2 Logische Richtigkeit

In diesem Buch soll jedoch meist nicht die eben beschriebene, schwer auf den Punkt zu bringende moralische Bedeutung von ‘richtig’ und ‘falsch’ untersucht werden. Es sollen, wie in der mathematischen Logik, im Folgenden vor allem solche Sachverhalte behandelt werden, in denen die Frage der Richtigkeit eindeutig zu beantworten ist. Hier soll ‘nicht richtig’ gleichbedeutend mit ‘falsch’ sein. Es soll keine Zwischenstufen wie bei der moralischen Bewertung mehr geben, nur noch die beiden sich ausschließenden Alternativen ‘richtig’ und ‘falsch’.

Durch solch eine strenge Einschränkung auf zwei Gegensätze wird allerdings die Menge der Aussagen, mit denen gearbeitet werden kann, stark verkleinert. Vor allem darf man sich nicht mehr mit Fragen nach der moralischen Richtigkeit menschlichen Verhaltens befassen.

> Diese Einschränkung auf logisch exakt verwertbare Aussagen ist notwendig, um zunächst die Funktionsweise der mathematischen Logik in ihrer reinsten Form kennenzulernen. Erst danach können ihre Prinzipien auch auf die Bewertung moralischer Probleme, die weniger exakt zu fassen sind, sinnvoll übertragen werden.

Wie aber sehen Aussagen aus, die nur richtig oder falsch sein können? Sie müssen sich unzweideutig formulieren lassen, sodass jeder, der die Aussage liest (und über die nötigen Vorkenntnisse verfügt), zu dem gleichen Urteil über ihre Richtigkeit gelangt. Diese Voraussetzung trifft auf moralische Wertungen kaum zu.

Die nachfolgenden Aussagen sind in diesem Sinne richtig. Ihre Richtigkeit wird allgemein Anerkennung finden, niemand wird sie infrage stellen.

Das Wort 'Buch' beginnt mit einem großen 'B'.

Wasser ist nass. (sofern es flüssig ist)

Dieser Satz hat fünf Worte.

Die drei Aussagen sind unzweifelhaft richtig, wie man unmittelbar nachprüfen kann. Diese unbestreitbare Eindeutigkeit ergibt sich allerdings auch aufgrund der mangelnden moralischen Relevanz ihres Inhalts. Jedoch sind logisch eindeutig bewertbare Aussagen darum nicht weniger bedeutsam; ihre Bedeutung zeigt sich aber erst in anderer, hier zu untersuchender Hinsicht.

Da in der Logik das Gegenstück zu 'richtig' 'falsch' ist, wird das genaue Gegenteil richtiger Sätze falsch. Es gibt nur diese beiden Alternativen. Für die drei richtigen Beispielaussagen von oben lauten die zugehörigen falschen Gegenaussagen, die den genau gegenteiligen Sinn haben:

Das Wort 'Buch' beginnt n i c h t mit einem großen 'B'.

Wasser ist n i c h t nass.

Der Satz „Dieser Satz hat fünf Worte" hat n i c h t fünf Worte.

Bei der Bildung der letzten Gegenaussage musste man offenbar mit größerer Sorgfalt vorgehen (dazu mehr im nachfolgenden Abschnitt). Schon hier zeigt sich dadurch jedoch, dass logisch eindeutig bewertbare Aussagen nicht ganz so einfach zu handhaben sind, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag.

Von nun an sollen in diesem Buch vor allem Aussagen untersucht werden, die nur entweder richtig oder falsch sein können (sofern sich aus dem jeweiligen Zusammenhang nicht etwas anderes ergibt). Ist also von nun an eine Aussage nicht 'richtig', so ist sie 'falsch'; ist sie nicht 'falsch', so ist sie 'richtig'. Es gibt in dieser Logik keine Zwischenzustände mehr, wie sie sich noch bei der moralischen Auffassung von Richtigkeit finden ließen. Die Veranschaulichung der logischen Richtigkeit in Abbildung 3.2 kann daher auf eine Skala verzichten; sie kennt nur zwei Gegenpole, aber es gibt keinen dritten Pol. Diese Situation wird lateinisch als 'Tertium Non Datur' bezeichnet.[5]

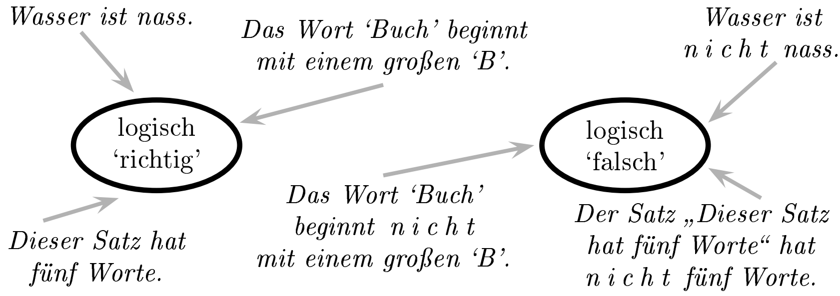

Abbildung 3.2: Gegenpole der logischen Richtigkeit

3.3 Korrekte Verneinung

Das Gegenteil einer logisch richtigen Aussage ist logisch falsch. Diese Regel trifft jedoch nur zu, wenn die Gegenaussage korrekt gebildet wird, wenn sie also wirklich das genaue Gegenteil der zu verneinenden Aussage darstellt.

Das genaue Gegenteil korrekt zu bilden, ist in einigen Fällen nicht so einfach, wie man zunächst glauben mag. Bereits bei der Verneinung der dritten Beispielaussage „Dieser Satz hat fünf Worte“ war diese Schwierigkeit zu erkennen. Die beiden ersten Beispielaussagen zu verneinen, war noch einfach gewesen. Die Verneinungen von „Das Wort ‘Buch’ beginnt mit einem großen ‘B’“ und „Wasser ist nass“ lassen sich durch Einfügen des Wortes ‘nicht’ an geeigneter Stelle erzeugen. Dieses mechanische Vorgehen darf bei der dritten Aussage jedoch nicht gewählt werden; es wäre sogar fatal. Denn die vermeintliche Gegenaussage zu „Dieser Satz hat fünf Worte“, mechanisch gebildet durch Einfügen des Wortes ‘nicht’, würde lauten:

Dieser Satz hat n i c h t fünf Worte.

Nach der anfangs genannten Regel müsste diese vermeintliche Gegenaussage eigentlich logisch falsch sein (als Verneinung einer logisch richtigen Aussage). Doch auch „Dieser Satz hat nicht fünf Worte“ ist logisch richtig, denn durch die Vergrößerung des Satzes um das Wort ‘nicht’ besteht die resultierende Formulierung nunmehr aus sechs Worten anstatt aus fünf. Sind also sowohl die Aussage „Dieser Satz hat fünf Worte“ und ihr (vermeintliches) Gegenteil „Dieser Satz hat nicht fünf Worte“ beide richtig? Was ist mit der Regel, das Gegenteil von ‘richtig’ sei ‘falsch’? Hier wäre dann ein Widerspruch zu dieser Regel gefunden.

Doch der Widerspruch entsteht nur durch die fehlerhafte mechanische Bildung der gegenteiligen Aussage durch Einfügen des Wortes ‘nicht’. Diese Mechanik versagt hier völlig. Mechanisches Denken ist eben fehleranfällig (und das nicht nur in diesem Fall; denn wenn es funktionieren würde, so könnte man, wie in Kapitel 1 gezeigt, ewig leben). Nicht der Satz als sprachliches (syntaktisches) Gebilde, sondern seine inhaltliche (semantische) Aussage ist zu verneinen.[6] Dann wird auch die allgemeine Regel wieder greifen, nach der das genaue Gegenteil einer richtigen Aussage falsch ist.

In unserem Beispiel spricht jeder der vermeintlich gegenteiligen Sätze über sich selbst. Der eine Satz spricht über die Aussage „Dieser Satz hat fünf Worte", der andere Satz über die Aussage „Dieser Satz hat nicht fünf Worte". Beide Sätze sprechen also über zwei *verschiedene* Aussagen und können somit gar nicht die korrekte sinngemäße Verneinung des jeweils anderen darstellen. Der eine spricht über eine Formulierung aus fünf Worten, der andere über eine *andere* Formulierung aus sechs Worten.

Die korrekt gebildete Verneinung von „Dieser Satz hat fünf Worte" lautet vielmehr:

Der Satz „Dieser Satz hat fünf Worte" hat n i c h t fünf Worte.

Diese Formulierung spricht nun tatsächlich ebenfalls über „Dieser Satz hat fünf Worte". Die Verneinung ist, wie es die Regel vorhersagt, offenbar logisch falsch, denn „Dieser Satz hat fünf Worte" hat doch fünf Worte. Das Gleichgewicht ist wieder hergestellt, das korrekt gebildete Gegenteil einer logisch richtigen Aussage ist logisch falsch.

Ein möglicherweise verbleibender Rest an Unklarheit löst sich auf, wenn die Aussage „Dieser Satz hat fünf Worte" so formuliert wird (also seine Syntax so geändert wird), dass auch die mechanische Verneinung funktioniert, ohne dabei ihren Sinn (die Semantik) zu verändern. Denn „Dieser Satz hat fünf Worte" ist inhaltlich gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Satz „Dieser Satz hat fünf Worte" hat fünf Worte.

Dies ist die logisch richtige Aussage, die es inhaltlich zu verneinen gilt. Hier genügt es nun wirklich, an der richtigen Stelle mechanisch das Wort 'nicht' einzufügen, um die oben zitierte korrekt gebildete Verneinung

Der Satz „Dieser Satz hat fünf Worte" hat n i c h t fünf Worte.

zu erhalten, die ihrerseits logisch falsch ist.

3.4 Wiederum eine Meta-Konstruktion

Möglicherweise ist Ihnen bereits aufgefallen, dass es wiederum eine Meta-Konstruktion ist, die hier Kopfzerbrechen bereitet. Während das erste Beispiel eine Aussage über das Wort 'Buch' machte (es beginnt mit einem großen 'B') und das zweite Beispiel eine Aussage über die Substanz Wasser in flüssigem Zustand (es ist nass), handelte es sich bei der dritten Formulierung um eine Aussage über den Satz selbst (er hat fünf Worte). Die Eigenschaft, Objekte wie sich selbst oder gar sich selbst zum Thema zu haben, ist jedoch die kennzeichnende Charakteristik eines Meta-Gebildes — wie schon der Geist der Lampe in Kapitel 2 erfahren musste, als er einen Meta-Wunsch erfüllen sollte. Der Satz „Dieser Satz hat fünf Worte" muss daher ein Meta-Satz sein; er macht eine Aussage über sich selbst.

Genaugenommen ist allerdings zwischen der Formulierung (sozusagen dem Erscheinungsbild, der Syntax) und der inhaltlichen Aussage des Satzes (seinem Sinn, der Semantik) zu unterscheiden. Inhalt des Satzes ist eine Aussage über die *Anzahl Worte*, aus der seine Formulierung besteht (aus fünf Worten). Der Satz macht jedoch keine Aussage über seinen logischen Inhalt. Die inhaltliche Aussage des Satzes ist daher für seine logische Richtigkeit nicht von Bedeutung. Die ursprüngliche Aussage hätte auch lauten können:

Der Satz „Die Erde ist eine Scheibe" hat fünf Worte.

Auch dies ist logisch richtig, denn der betrachtete Satz besteht tatsächlich aus fünf Worten (wie auch „Dieser Satz hat fünf Worte" aus fünf Worten bestand). Hingegen ist die Aussage, über die dieser Satz spricht, sachlich falsch (denn die Erde ist keine Scheibe).

Entsprechend ist die Aussage

Der Satz „Mechanisches Denken kann zu Fehlern führen"
hat n i c h t fünf Worte.

ebenfalls logisch richtig (diesmal sind es sechs Worte). Dabei machen weder „Die Erde ist eine Scheibe" noch „Mechanisches Denken kann zu Fehlern führen" eine Aussage über sich selbst, sind also keine Meta-Sätze.

Der Selbstbezug in „Dieser Satz hat fünf Worte" entsteht demnach aus einer Kombination von Formulierung und Inhalt. Es wurde keine Aussage über die eigene Aussage gemacht, was einen echten und reinen Selbstbezug ergeben hätte, sondern eine Aussage über die eigene Formulierung. Entscheidend für das Verständnis von Paradoxien ist aber die saubere Trennung zwischen Satzaussage (Inhalt, Semantik, Sinn) und Satzerscheinungsbild (Formulierung, Syntax, Anzahl Worte).

3.5 Ist dieser Satz richtig oder falsch?

Die bisher untersuchten Sätze machten Aussagen über Objekte (das Wort 'Buch', Wasser) beziehungsweise über die Anzahl Worte, aus denen ein Satz besteht (also über sein Erscheinungsbild). Damit wurde nur bedingt eine höhere Ebene der Abstraktion erreicht, obwohl es sich bei der Aussage „Dieser Satz hat fünf Worte“ in gewissem Sinn bereits um einen Meta-Satz handelt. Eine Formulierung, die ganz gewiss ein Meta-Satz ist, ergibt sich aber erst dann, wenn ein Satz eine Aussage über seine eigene Aussage macht (anstatt nur über seine eigene Form).

Was aber kann ein Satz über seine eigene Aussage aussagen? Eine wesentliche Eigenschaft einer Aussage ist ihre logische Richtigkeit. Ein echter Meta-Satz könnte daher eine Aussage über die logische Richtigkeit seiner eigenen Aussage machen. Solch ein Meta-Satz ist:

Dieser Satz ist richtig.

Er behauptet, dass das, was er sagt, logisch richtig sei. Ob diese Aussage letztendlich Substanz hat, soll erst einmal offenbleiben (obwohl sie gewiss einen korrekt gebildeten Satz unserer Sprache darstellt). Auf jeden Fall gibt es — logisch gesehen — genau die beiden Möglichkeiten:

Die Aussage des Satzes „Dieser Satz ist richtig“ ist richtig.

o d e r

Die Aussage des Satzes „Dieser Satz ist richtig“ ist falsch.

Die erste Möglichkeit („Dieser Satz ist richtig“ ist richtig) scheint zuzutreffen. Bei dieser Alternative würde es keine Abweichung geben zwischen dem, was der Satz von sich selbst behauptet, und dem, was tatsächlich gilt. Die zweite Alternative („Dieser Satz ist richtig“ ist falsch) klingt dagegen widersprüchlich, da das, was der Satz von sich selbst behauptet (richtig zu sein), nicht mit dem übereinstimmen würde, was tatsächlich gälte (falsch zu sein). Also ist „Dieser Satz ist richtig“ offenbar richtig.

Damit hat man also zwar einen echten Meta-Satz gefunden, aber noch keinen Widerspruch.

Zu einem greifbaren unlösbaren Widerspruch gelangt man erst, wenn man die logische Richtigkeit der Aussage

Dieser Satz ist falsch.

untersucht. Auch diesmal lässt sich die Frage stellen, ob diese Aussage überhaupt Substanz hat. Andererseits stellt auch sie einen korrekt formulierten Satz unserer Sprache dar, den man nicht von vornherein als sinnlos verwerfen sollte.

> Der Meta-Satz „Dieser Satz ist falsch" ist übrigens nicht das genaue Gegenteil des Meta-Satzes „Dieser Satz ist richtig", genauso wenig wie „Dieser Satz hat fünf Worte" das genaue Gegenteil von „Dieser Satz hat *nicht* fünf Worte" war. Denn auch bei „Dieser Satz ist falsch" und „Dieser Satz ist richtig" sprechen die beiden syntaktisch identischen Teilformulierungen „Dieser Satz" jeweils über verschiedene Objekte: einmal über die Aussage des Satzes „Dieser Satz ist falsch", das andere Mal über die *andere* Aussage des Satzes „Dieser Satz ist richtig". Das genaue Gegenteil zu „Dieser Satz ist richtig" ist
>
> *Der Satz „Dieser Satz ist richtig" ist falsch.*
>
> und das genaue Gegenteil zu „Dieser Satz ist falsch" ist
>
> *Der Satz „Dieser Satz ist falsch" ist richtig.*

Logisch betrachtet gibt es für die Richtigkeit der inhaltlichen Aussage von „Dieser Satz ist falsch" genau zwei Möglichkeiten:[7]

Die Aussage des Satzes „Dieser Satz ist falsch" ist richtig.

o d e r

Die Aussage des Satzes „Dieser Satz ist falsch" ist falsch.

Welche Alternative trifft nun zu? Da der Satz recht unplausibel klingt, könnte man annehmen, es sei die zweite Möglichkeit („Dieser Satz ist falsch" ist falsch). Wenn „Dieser Satz ist falsch" aber tatsächlich falsch ist, so sagt er die Wahrheit über sich selbst. Wenn er die Wahrheit über sich selbst sagt, so muss er richtig sein. Damit scheint es so, als gälte doch die erste Alternative („Dieser Satz ist falsch" ist richtig). Wenn der Satz richtig ist, so stimmt das, was er behauptet. Er behauptet aber, dass er selbst falsch sei. Es wäre also wahr, dass er falsch ist. Somit wäre „Dieser Satz ist falsch" falsch. Damit ist wieder die zweite Möglichkeit erreicht. Man müsste nun mit seinen Überlegungen wieder von vorn beginnen.

Jede der beiden logischen Möglichkeiten führt hier zu ihrem genauen Gegenteil. Aus falsch folgt richtig, aus richtig folgt falsch. Solch ein Verhalten ist äußerst widersprüchlich. Denn die Argumentation verläuft in einem endlosen Kreis, wie er in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Eine sich endlos im Kreis bewe-

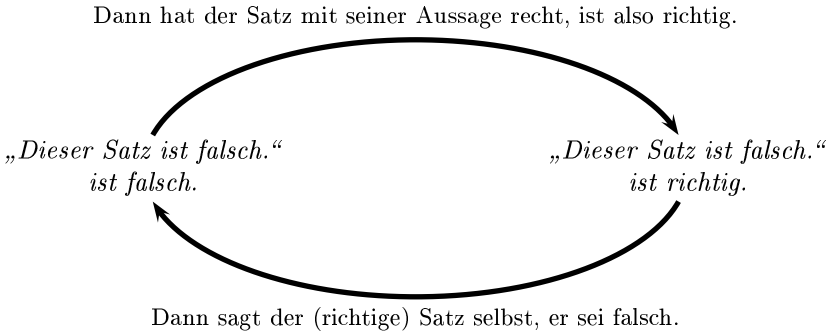

Abbildung 3.3: Eine endlos im Kreis verlaufende Argumentationskette

gende Argumentationskette, die nie bei einer der beiden logischen Möglichkeiten von Richtigkeit anhält und bei der sich aus jeder der beiden Alternativen ihr genaues Gegenteil folgern lässt, wirkt in einem logisch eindeutigen System äußerst fehl am Platz.

Gelten nun beide Alternativen gewissermaßen zugleich und zugleich auch nicht? Ist „Dieser Satz ist falsch“ zugleich richtig und falsch — oder ist er keines von beidem? Beide Alternativen zugleich können aber nicht gelten, denn richtig und falsch schließen einander gegenseitig aus. Vielleicht gilt also keine der beiden Alternativen, da jede von ihnen in diesem Widerspruchskreis zu ihrem Gegenteil führt? Ist die Aussage des Satzes „Dieser Satz ist falsch“ weder richtig noch falsch? Kann die Frage nach seiner logischen Richtigkeit im Grunde nicht entschieden werden? Aber eines davon muss doch zutreffen? — Es wäre jedoch äußerst unbefriedigend, mit seinem logischen Denksystem bereits vor solch einem kurzen Satz kapitulieren zu müssen.

Welche Lösungsmöglichkeiten sich für ein derartiges Problem aus mathematischer Sicht bieten, wird sich im Verlauf des Buches ergeben. Wir werden der Aussage „Dieser Satz ist falsch“ in Kapitel 11 als Fall der sogenannten Russellschen Antinomie wieder begegnen. An dieser Stelle kann aber schon festgehalten werden, dass Aussagen mit Selbstbezug äußerst widersprüchlich ausfallen können und mit äußerster Vorsicht zu behandeln sind. Das Einzige, dessen man sich im Moment sicher sein kann, ist, einen Meta-Satz entdeckt zu haben, der dieser Bezeichnung alle Ehre macht. Im Nachhinein würde man sich fast wünschen, ihn nie formuliert zu haben.